

**Ecole Doctorale : I2S-Information, Structures, Systèmes**

**Titre : Homogénéisation et relaxation en élasticité non linéaire**

**Title : Homogenization and relaxation in nonlinear elasticity**

**Encadrants de thèse : Omar ANZA-HAFSA, Jean-Philippe MANDALLENA , Thibaut WELLER**

**Correspondant/Contact : Omar ANZA-HAFSA**

**—Tél : 0467149652—email : omar.anza-hafsa@univ-montp2.fr**

**Mots clés : Homogénéisation, relaxation, élasticité non linéaire, contraintes non linéaires, quasiconvexité,  $\Gamma$ -convergence**

**Keywords : Homogenization, relaxation, nonlinear elasticity, nonlinear constraints, quasiconvexity,  $\Gamma$ -convergence**

**Unité de recherche : LMGC-Laboratoire de mécanique et de génie civil-**

**<http://www.lmgc.univ-montp2.fr/> (équipe M<sup>3</sup>)**

**Profil du(de la) candidat(e) : Master en mathématiques, mathématiques appliquées ou mécanique théorique avec des connaissances en analyse fonctionnelle, théorie de la mesure, élasticité.**

**Background of the candidate : Master in mathematics, applied mathematics or theoretical mechanics with knowledges in functional analysis, measure theory, elasticity.**

**Sujet :** L'homogénéisation et la relaxation d'énergies élastiques ont été généralement étudiés sans tenir compte des conditions naturelles de l'élasticité non linéaire : la non-interpénétration de la matière et la préservation de l'orientation du gradient des déformations. Cependant, des travaux ont été effectués (voir [1,3]) montrant par exemple qu'il est possible de prendre en compte la seule condition de non-interpénétration, ou de satisfaire ces deux conditions dans des cas très particuliers (voir [2,4]).

Ce sujet de thèse concerne de façon générale l'étude de l'homogénéisation et de la relaxation de problèmes variationnels non convexes en présence de contraintes non linéaires sur le gradient.

La prise en compte des contraintes sur les gradients des déformations pose des difficultés à cause du caractère vectoriel des problèmes issus de l'élasticité non linéaire, i.e., ces problèmes correspondent à des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Par exemple, le cas scalaire a été largement étudié. Il correspond au cas où le gradient est un vecteur. Toutefois les outils qui ont été développés dans cette situation ne sont pas utilisables dans le cas vectoriel. Cela vient du fait que contrairement au cas scalaire où la convexité joue un rôle central, dans le cas vectoriel le concept clé est la *quasiconvexité* (au sens de Morrey) qui est différente de la convexité. Les contraintes sur les gradients de déformations conduisent à considérer des densités d'énergies non finies en dehors d'un ensemble non convexe de matrices. Malheureusement, très peu de choses sont connues sur la quasiconvexité et la *quasiconvexification des densités d'énergies* prenant la valeur infinie. L'objectif est d'améliorer notre compréhension dans cette direction.

**Subject :** Homogenization and relaxation of elastic energies were in general studied without taking account on natural conditions of nonlinear elasticity : the non-interpenetration of the

matter and the prevention of orientation reversal. However, some works show that it is possible to take into account the non-interpenetration only (see [1,3]), or in some particular cases the two conditions were both considered (see [2,4]).

The research work consists to study homogenization and relaxation of nonconvex variational problems with nonlinear constraints on gradients.

It is not easy to consider nonlinear constraints in variational problems arising from nonlinear elasticity since these problems correspond to systems of partial differential equations. This is called the vectorial case. In the scalar case many tools were developed where the convexity plays a central role. But these tools do not work in the vectorial case where the key concept *quasiconvexity* (in the sense of Morrey) is different from convexity. The stored energies functions have to take the infinite value outside a nonconvex set of matrices in order to take the constraints into account. Unfortunately, little is known about the behavior of quasiconvex and *quasiconvex envelope* of stored energies functions with non finite values. Our objective is therefore to deepen our knowledge in this field.

[1] Omar Anza Hafsa et Jean-Philippe Mandallena. Relaxation theorems in nonlinear elasticity. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 25(1):135–148, 2008.

[2] Omar Anza Hafsa et Jean-Philippe Mandallena. Homogenization of nonconvex integrals with convex growth. *J. Math. Pures Appl.* (9), 96(2):167–189, 2011.

[3] Omar Anza Hafsa, Mohamed Lamine Leghmizi, et Jean-Philippe Mandallena. On a homogenization technique for singular integrals. *Asymptot. Anal.*, 74(3-4):123–134, 2011.

[4] Omar Anza Hafsa et Jean-Philippe Mandallena. Homogenization of unbounded singular integrals in  $W^{1,\infty}$ . *Ricerche di Matematica*, pages 1–33, 2011.