DIAGRAMMES DE BLASCHKE–SANTALÓ: UN OUTIL INCONTOURNABLE POUR L'ÉTUDE DES INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES

Ilias Ftouhi

ABSTRACT. Nous nous intéressons au spectre de l'opérateur de Laplace avec des conditions aux limites Dirichlet sur $\partial\Omega$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, et plus précisément à sa première valeur propre, également appelée la fréquence fondamentale $\lambda_1(\Omega)$. Malheureusement, il n'existe pas en général de formule explicite pour $\lambda_1(\Omega)$. Cela motive la recherche d'estimations via d'autres fonctionnelles, plus simples à manipuler (par exemple : le périmètre $P(\Omega)$ et le volume $|\Omega|$).

Nous commençons par une brève introduction à l'optimisation de formes et à la théorie spectrale, puis nous introduisons l'ensemble suivant, que l'on appelle le diagramme de Blaschke–Santaló du triplet $(P, \lambda_1, |\cdot|)$:

$$C_{F_{ad}} := \{(P(\Omega), \lambda_1(\Omega)) \mid \Omega \in F_{ad} \text{ et } |\Omega| = 1\},$$

où F_{ad} est une classe donnée de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$. Il faut noter que la caractérisation d'un tel diagramme équivaut à trouver toutes les inégalités possibles reliant les trois quantités (P, λ_1 et $|\cdot|$ dans notre cas).

Nous parvenons à décrire complètement le diagramme pour les ensembles ouverts dans $\mathbb{R}^d$, en montrant qu'il n'existe pas d'autres inégalités que celles de Faber–Krahn et l'inégalité isopérimétrique. Cela motive l'investigation d'autres classes d'ensembles, comme les convexes, pour lesquels nous fournissons une description avancée du diagramme correspondant. Enfin, nous discutons l'utilisation de l'outil numerique pour une description optimale de ce type de diagrammes et montrons plusieurs exemples.